DEC-MESTFP **2020**

DT/ SCIENCES ET TECHNIQUES INDUSTRIELLES

EPREUVES THEORIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES GENERALES (toutes spécialités)
DUREE : 3 H
COEF : 3

SUJET

Exercice 1

Soient les équations d'inconnue Z dans $\mathbb{C}$

(E) : $z^3 = 1$ et (F) : $2z^3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

On pose $C = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{4}$.

1- a) Ecrire C sous forme algébrique.

b) Calculer le module et un argument de C.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2- Soit S la similitude plane directe d'écriture complexe $z' = z\, e^{\frac{i\pi}{3}}$ et A le point d'affixe $e^{\frac{-i\pi}{4}}$.

a) Déterminer l'affixe de l'image A' de A par S.

b) Vérifier que $e^{\frac{i\pi}{12}}$ est une solution de (F).

c) Démontrer que :

Z est solution de (F) $\Leftrightarrow \frac{Z}{e^{\frac{\pi i}{12}}}$ est solution de (E).

d) En déduire toutes les solutions de (F) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2

1- a) Linéariser $\sin x \cos 2x$ pour tout nombre réel x.

b) En déduire que la fonction F : $x \longmapsto -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \to \sin x \cos 2x$.

2- Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\pi} x \cos nx\, dx$.

a) Calculer I_n en fonction de n.

b) En déduire I_1, I_2 et I_3.

3- A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur exacte de l'intégrale $J = \int_0^{\pi} x^2 \sin x \cos 2x\, dx$.

(Page suivante)

Problème

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \ln |e^x - 1|$.

1- Justifier que l'ensemble de définition de f est $D =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

2- Calculer les limites de f aux bornes de D.

3- a) Déterminer la dérivée première f′ de f puis étudier son signe sur D.

b) Achever l'étude des variations de f.

4- a) Démontrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe représentation (C) de f au voisinage de $+\infty$.

b) Préciser les autres asymptotes de (C).

c) Déterminer les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

d) Construire (C) dans un repère orthonormé (O ,I ,J).

5- Soit g la fonction de]O , +∞[dans f( ]O , +∞[ ) définie par : $g(x) = f(x)$.

a) Démontrer que g admet une application réciproque g^{-1}.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x appartenant à un ensemble K que l'on précisera.

BONNE CHANCE !